年份不明

B卷（A B卷只是顺序不同）

一 判断题（每小题2分，10小题）（顺序不对）

1.T是线性赋范空间B上的有界线性算子，则任意闭集的原像都是闭集。

2.B是Banach空间，则它的任意闭子集都是完备的。

3.B是线性赋范空间，T是紧算子，它映有界集合到紧集合。

4.B是Banach空间，T是有界线性算子，它映任意开集到开集。

5.B是Banach空间，T是B上的一个无界算子，那么B是无限维的。

二 设S是l^2空间上的子集，S={{z\_n} | |z\_n|<=1/n,n∈N}，证明S是l^2空间上的紧集。

（提示：R^n空间或者C^n中的有界闭集是紧集，所以是全有界的。）（15分）

三 积分方程 x(s)-λ∫(from 0 to 1)exp(s-t)x(t)dt=y(s)，写成算子方程，

就是(I-λT)x=y。T: Tx(s)=∫(from 0 to 1)exp(s-t)x(t)dt。

1.求||T||；（5分）

2.求解这个积分方程。（10分）

四 线性空间F上定义了两个范数||·||\_1和||·||\_2，(F,||·||\_1)和(F,||·||\_2)

都是Banach空间M>0，存在M>0，对于任意x∈F，||x||\_1<M\*||x||\_2。

求证这两个范数等价。（15分）

五 T:l^2→l^2 (z\_1,z\_2,z\_3,…)→(z\_2/1,z\_3/2,z\_4/3,…)

求证：

1.T是紧算子；（5分）

2.Range(T)在l^2中稠密；（5分）

3.求T的特征值和特征子空间；（5分）

4.求σ(T)。（5分）

六 Hilbert 空间l^2上有一个规范正交序列{v\_n}

1.对于空间上任意一点U,lim<U,Vn>是否存在？为什么？

如果存在，求出它的极限。

2.Σv\_n/n是否收敛？为什么？

3.Σv\_n/sqrt(n)是否收敛？为什么？ （15分）

选作题 （15分）

Hilbert空间H上有有界线性算子A，满足|<Ax,x>|>m\*||x||，m>0，

求证：

1.A是单射；

2.Range(A)是闭集；

3.A存在有界逆，即A^{-1}存在且有界。